Cap. 5 . Oscilações

Quase todos os sistemas físicos exibem oscilações quando sofrem ~~pequenos~~ deslocamentos de uma posição de equilíbrio estável. Se estes deslocamentos são pequenos, as oscilações são quase sempre do tipo chamado harmônico simples.

São também muito úteis - por exemplo, todo bom relógio depende de um oscilador. Os primeiros relógios confiáveis usavam um pêndulo; os primeiros relógios precisos (cruciais na navegação) usavam uma roda balanceada oscilante; relógios modernos usam as oscilações de um cristal de quartzo; e os relógios + precisos de hoje usam oscilações de ~~um~~ átomos. Neste capítulo vamos explorar a física e a matemática das oscilações. Começaremos com oscilações harmônicas simples, depois oscilações amortecidas (que decrescem e desaparecem pela presença de forças resistivas) e oscilações forçadas, que são mantidas por uma força externa, como em todos os relógios.

5.1 Lei de Hooke

Objeto massivo preso a uma extremidade de uma mola que obedeça à lei de Hooke executa oscilações harmônicas simples. Antes de rever a demonstração desta afirmação, perguntemo-nos porque a lei de Hooke é tão importante e aparece tão frequentemente.

Lei de Hooke: força exercida por mola (restrita a movimentos sobre o eixo x) é $F_x(x) = -kx$, x = deslocamento a partir do equilíbrio e k constante > 0. Como k > 0, x = 0 é posição de equilíbrio estável (examine a força para x > 0 e x < 0). Esta é uma força restauradora (e linear).

Forma equivalente: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

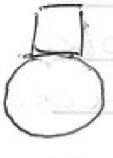
Considere agora sistema conservativo unidimensional com ponto de equilíbrio estável, que tomaremos como $x_0 = 0$, e o comportamento da U(x) nas vizinhanças deste ponto através sua expansão em série de Taylor:

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \cdots$$

Se x é pequeno, podemos ignorar os demais termos; podemos também redefinir a referência de energia potencial para fazer $U(0) = 0$. Como $x_0 = 0$ é de equilíbrio, $U'(0) = 0$. Chamando $U''(0)$ de k, ficamos com

$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, para x suficientemente pequeno. (Lembre que, como o equilíbrio em $x_0 = 0$ é estável, $U''(0) = k > 0$.)

Exemplo: cubo equilibrado sobre cilindro



Vimos que

$$U(\theta) = mg[(r+b)\cos\theta + r\theta \operatorname{sen}\theta];$$

se θ é pequeno,

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$$

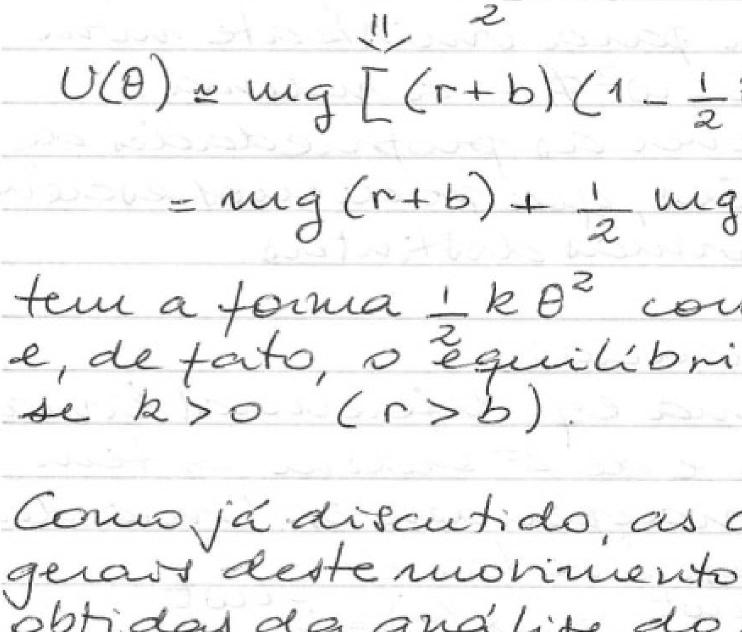
$$\Downarrow$$

$$U(\theta) \simeq mg\left[(r+b)\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) + r\theta^2\right] =$$

$$= mg(r+b) + \frac{1}{2} mg(r-b)\theta^2, \text{ que}$$

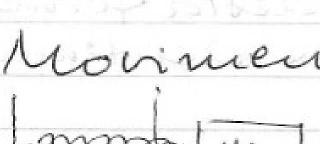
tem a forma $\frac{1}{2}k\theta^2$ com $k = mg(r-b)$ – e, de fato, o equilíbrio só é estável se $k > 0$ $(r > b)$.

Como já discutido, as características gerais deste movimento podem ser obtidas da análise do gráfico $U(x) \times x$.



Sistema com energia total $E (>0)$ é ligado e oscila entre $x = -A$ e $x = A$ $\left(E = \frac{1}{2}kA^2\right)$: A é a amplitude das oscilações.

5.2 Movimento harmônico simples



$$m\ddot{x} = F_x = -kx$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, que é a frequência angular com que o sistema oscila. Esta eq. de movimento se aplica a muitos sistemas diferentes, em diferentes sistemas de coordenadas. Vimos, por exemplo, no cap. 1 que a eq. para a coordenada angular de um pêndulo simples, ou para um skate num tubo, é $\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi$ — a mesma!

Vamos rever as propriedades de suas soluções, que podemos escrever de várias formas distintas.

Soluções exponenciais

Esta é uma eq. diferencial linear, homogênea e de 2ª ordem → tem 2 soluções independentes. Uma das formas de escrevê-las é

$$x(t) = e^{i\omega t} \quad e \quad x(t) = e^{-i\omega t}$$

(veja que ambas satisfazem a eq.)

A solução geral é

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

(eq. linear e homogênea ⇒ vale o princípio da superposição: qualquer combinação linear de soluções é também solução) — logo, qualquer solução pode ser escrita desta forma, escolhendo-se C_1 e C_2 convenientemente.

Soluções senoidais

A forma anterior tem uma desvantagem: $x(t)$ é real, enquanto as exponenciais são complexas $\Rightarrow C_1$ e C_2 devem ser escolhidos com cuidado. Podemos, no entanto, reescrevê-la usando a fórmula de Euler

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$
$$= B_1 \cos\omega t + B_2 \,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

$B_1 = C_1 + C_2$ e

$B_2 = i(C_1 - C_2)$, reais

Esta última forma pode ser tomada como definição de um MHS: é todo movimento obtido por combinação linear de sen e cos do mesmo argumento.

É fácil identificar B_1 e B_2 com as condições iniciais:

$$x(t=0) = B_1 = x_0$$
$$\dot{x}(t=0) = \omega B_2 = v_0$$

Se, em $t=0$, $x(0)=x_0$ e $v_0=0$ (descreva como conseguir isto!),

$$x(t) = x_0 \cos\omega t \quad \text{(gráfico)}$$

Se, em $t=0$, $x(0)=0$ e $v_0 \neq 0$ (idem)

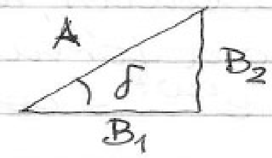
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad \text{(gráfico)}$$

Estas soluções são periódicas, com período $\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Solução cosseno + fase

A solução geral é + difícil de visualizar do que os 2 casos especiais mostrados. Para facilitar este aspecto, é útil reescrevê-la. Vamos definir outra constante

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$



Agora,

$$x(t) = A\left[\frac{B_1}{A}\cos(\omega t) + \frac{B_2}{A}\operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

$$= A\left[\cos\delta\cos(\omega t) + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

$$= A\cos(\omega t - \delta),$$

que deixa claro que o sistema oscila com amplitude A e frequência angular ω; a solução é um cosseno defasado de δ: em $t=0$, seu argumento é $-\delta$, e as oscilações estão atrasadas com relação ao cosseno pela fase δ (phase shift)

Obtivemos a solução geral diretamente da eq. de movimento, mas ela também pode ser obtida pelo método da energia (Lista 6).

Solução como a parte real de uma exponencial complexa

Outra forma útil de escrever a solução, em termos das exponenciais complexas: em termos de B_1 e B_2,

$$C_1 = \frac{1}{2}(B_1 - iB_2) \quad e \quad C_2 = \frac{1}{2}(B_1 + iB_2)$$

$$C_2 = C_1^*$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{i\omega t} + \underbrace{C_1^* e^{-i\omega t}}_{(C_1 e^{i\omega t})^*}$$

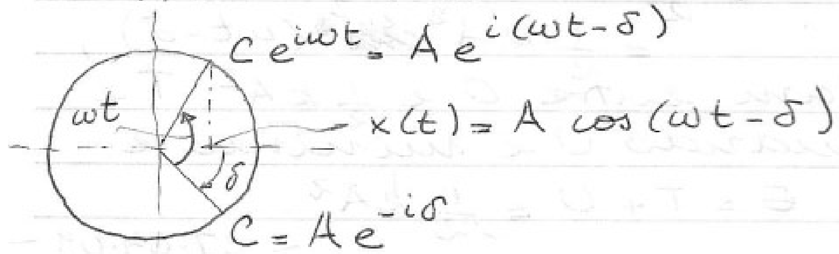
$$x(t) = 2 \, \mathrm{Re}\, C_1 e^{i\omega t} \qquad (z + z^* = 2 \, \mathrm{Re}\, z)$$

Se definirmos $C = 2C_1$,

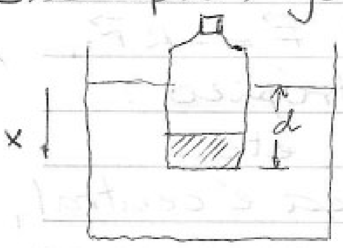
$$C = B_1 - iB_2 = Ae^{-i\delta}, \text{ e}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\, C e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\, A e^{i(\omega t - \delta)}$$

Este resultado é ilustrado na figura.



Exemplo: garrafa flutuando num balde



No equilíbrio, $d = d_0$

Forças na garrafa:

peso $= mg$ (p/ baixo)

empuxo $= \rho g A d$

No equilíbrio, $mg = \rho g A d_0$ ($\Rightarrow m = \rho A d_0$)

Se $d = d_0 + x$ (x é coordenada medida a partir da posição de equilíbrio, sempre a melhor nestes casos)

$$m\ddot{x} = mg - \rho g A(d_0 + x) = -\rho g A x$$

e

$$\ddot{x} = -\frac{\rho A}{m} g x = -\frac{g}{d_0} x$$

→ MHS com $\omega = \sqrt{\frac{g}{d_0}}$, que <u>não</u> depende de m, ρ e A explicitamente, e é a mesma de um pêndulo simples de comprimento d_0. Se $d_0 = 20$cm,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}20}{9{,}8}} = 0{,}9\ 1.$$

Análise da energia

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \delta), \text{ e}$$

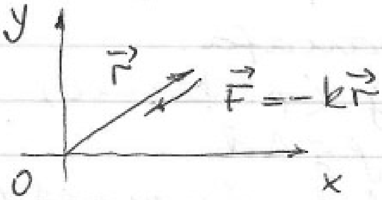
$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t-\delta) = \\ = \frac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t-\delta),$$

que oscilam entre 0 e $\frac{1}{2}kA^2$. T é máximo quando U é mínimo e vice-versa. $E = T + U = \frac{1}{2}kA^2$.

— 27-04-09 —

5.3 Osciladores bidimensionais

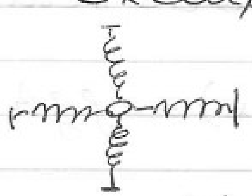
Em 2D e 3D, as possibilidades são + ricas. O caso + simples é $\vec{F} = -k\vec{r}$, o oscilador harmônico isotrópico:



$F_x = -kx$, etc.

e a força é central, dirigida para a posição de equilíbrio, que escolhi como origem.

Exemplo concreto:



(4 molas idênticas).

Em 3D: átomo em cristal simétrico, próton em núcleo.

Em 2D, $\ddot{x} = -\omega^2 x$

$\ddot{y} = -\omega^2 y$, $\omega = \sqrt{k/m}$

$\Downarrow$

$x(t) = A_x \cos(\omega t - \delta_x)$

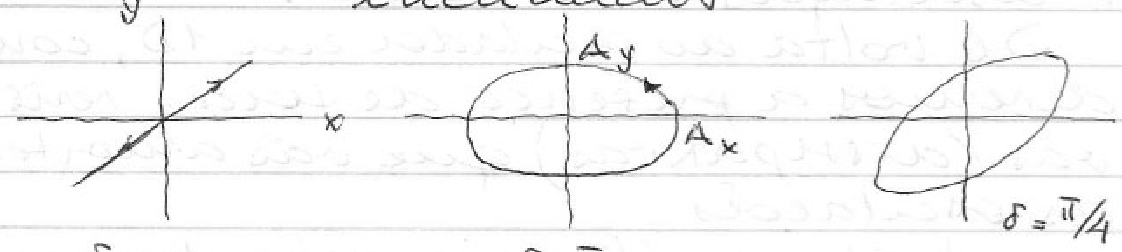
$y(t) = A_y \cos(\omega t - \delta_y)$ com as constantes A_x, A_y, δ_x e δ_y determinadas pelas condições iniciais. Podemos redefinir a origem dos tempos e, com isso, eliminar δ_x (por exemplo), e a forma + simples para a solução geral é

$x(t) = A_x \cos(\omega t)$

$y(t) = A_y \cos(\omega t - \delta)$ ($\delta = \delta_y - \delta_x$ é a fase relativa)

O comportamento da solução depende dos valores das constantes:

- se A_x ou $A_y = 0 \Longrightarrow$ MHS em 1D.
- se A_x e $A_y \neq 0$:
  . se $\delta = 0$, movimentos em fase
  . se $\delta = \pi/2$, ~~movimentos~~ elipse
  . para outro δ, elipse com eixos inclinados



$\delta = 0$ $\delta = \pi/2$

Num oscilador anisotrópico,

$F_x = -k_x x$, $F_y = -k_y y$, $F_z = -k_z z$

$(k_x \neq k_y \neq k_z)$

Exemplo: átomo em cristal de baixa simetria.

Em 2D, $\ddot{x} = -\omega_x^2 x$

$\ddot{y} = -\omega_y^2 y$, $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$

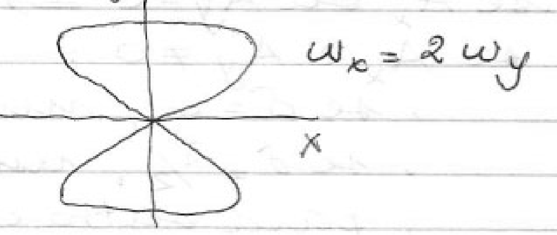
e a solução geral é

$x(t) = A_x \cos(\omega_x t)$

$y(t) = A_y \cos(\omega_y t - \delta)$

Se $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ é racional, movimento é periódico (ver lista 7) e a trajetória resultante é chamada uma figura de Lissajous.

Se $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ é irracional, o movimento nunca se repete – é chamado de quase periódico (coordenadas separadas têm movimento periódico, mas $\vec{r}$ não)



5.4 Oscilações amortecidas

De volta ao oscilador em 1D, consideremos a presença de forças resistivas (dissipativas) que vão amortecer as oscilações:

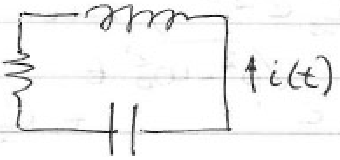
- atrito cinético: constante em módulo (aproximadamente) e oposto a $\vec{v}$.
- arrasto de fluido: $\sim -v^n \hat{v}$

Vamos consideraqui apenas o arrasto linear, $\vec{f} = -b\vec{v}$ (a equação é simples de resolver e aparece em muitos contextos diferentes – para outras formas de arrasto, complicações podem surgir: caos!)

A resultante é $-b\dot{x} - kx$, e a eq. de movimento

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

(a mesma equação aparece no estudo de circuitos RLC, por exemplo:



$V_L = L\dot{i} = L\ddot{q}$

$V_R = Ri = R\dot{q}$

$V_C = \frac{q}{C}$

$$\Rightarrow \underbrace{L\ddot{q}}_{\text{inércia}} + \underbrace{R\dot{q}}_{\text{arrasto}} + \underbrace{\frac{1}{C}}_{\text{constante de "mola"}} q = 0$$)

Vamos reescrevê-la, com $2\beta = \frac{b}{m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $\longrightarrow$ frequência natural do sistema

$\Downarrow$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

(dim β, ω_0: s^{-1})

eq. diferencial linear, homogênea e de 2ª ordem $\Rightarrow$ se encontrarmos 2 soluções independentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ ($x_1(t) \neq C x_2(t)$), a solução geral é $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$. Isto significa que podemos usar "adivinhação inspirada" para encontrá-las.

Tentemos soluçãs da forma $x(t)=e^{rt}$:

$$\dot{x} = r e^{rt}$$
$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{(eq. auxiliar)}$$
$$\Downarrow$$
$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = \quad - \end{array}$$

(se $\beta \neq \omega_0$)

Com isso, achamos 2 soluções independentes! A solução geral é

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \text{ ou}$$
$$x(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

Vamos ver o que significa.

- oscilações não amortecidas

$$\beta = 0 \Rightarrow x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

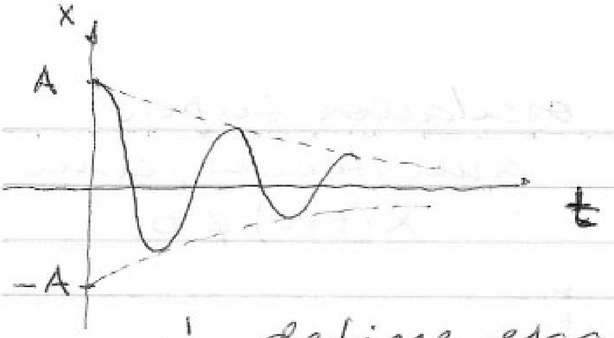
- amortecimento fraco ($\beta < \omega_0$)

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = i\omega_1 \quad (\omega_1 < \omega_0)$$
$$\Downarrow$$
$$x(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{fator de amortecimento da amplitude}} \underbrace{\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right)}_{\text{MHS com frequência } \omega_1 (< \omega_0)}$$

ou

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

tilibra



não periódico; mas continuamos a poder definir período ($\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$)

$\frac{1}{\beta}$ define escala de tempo do amortecimento: tempo necessário para a amplitude diminuir por fator $\frac{1}{e}$. Quanto maior for β ($< \omega_0$), mais rápido decaem as oscilações.

Caso extremo: $\beta \ll \omega_0 \implies \omega_1 \simeq \omega_0$.

- amortecimento forte ($\beta > \omega_0$)

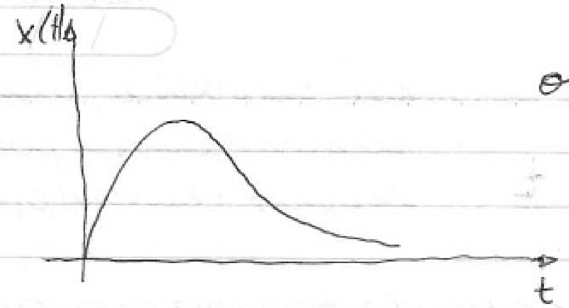
Reescrevo a solução

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

soma de 2 exponenciais (reais) decrescentes. Neste caso, o amortecimento é tão intenso que o sistema não chega a completar uma oscilação. A 1ª exponencial decai + lentamente ($\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$) e domina a solução para tempos longos, e a taxa de decaimento do movimento neste regime é caracterizada pelo parâmetro $\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ (ou seu inverso, que tem a dimensão de tempo). Este parâmetro decresce com β (se $f(\beta) = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $f'(\beta) =$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_0^2/\beta^2}} < 0),$$

e o movimento leva mais tempo para cessar quando o amortecimento aumenta!



oscilador super amortecido, com $\dot{x}(t=0) \neq 0$

- amortecimento crítico

É a fronteira entre os 2 anteriores, quando $\beta = \omega_0$.

Do ponto de vista matemático, neste caso $x_1(t)$ e $x_2(t)$ antes encontradas são iguais

$$x_1(t) = x_2(t) = e^{-\beta t}$$

Temos, portanto que achar uma 2ª solução independente desta. Lá vai: ($\beta = \omega_0$)

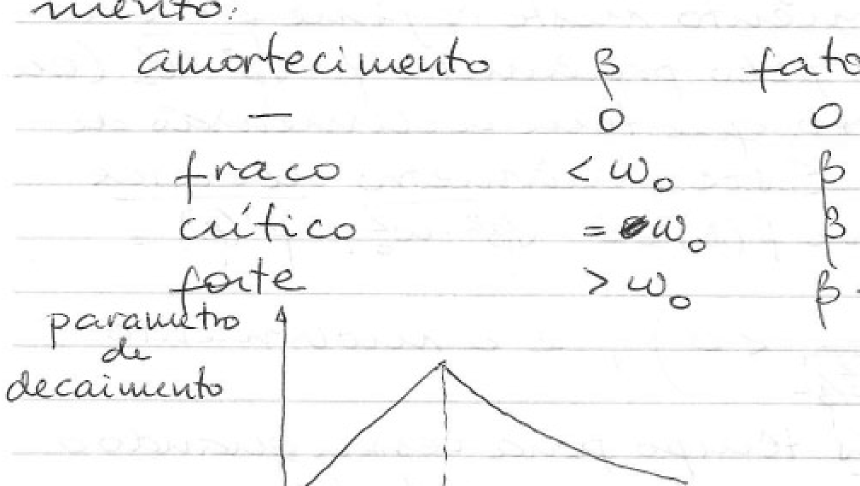
$$x_2(t) = t\,e^{-\beta t},$$ e a solução geral é

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} = e^{-\beta t}(C_1 + C_2 t),$$

e o fator exponencial domina o decaimento para tempos longos.

Tabela para os fatores de decaimento:

amortecimento	β	fator (parâmetro)
—	0	0
fraco	$< \omega_0$	β
crítico	$= \omega_0$	β
forte	$> \omega_0$	$\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$



O gráfico mostra que o movimento se extingue + rápido quando $\beta = \omega_0$ (situação crítica). Há situações onde isto é desejável (agulha de aparelho de medida analógico, por exemplo, ou ~~amor~~ sistema de amortecimento de carros). Nestes casos, devemos escolher amortecimento próximo ao crítico.

— 29/04/09a

5.5 Oscilações forçadas e amortecidas.

Se queremos oscilações (reais) que não se extinguam, devemos ter força externa para mantê-las. Por exemplo, o movimento do pêndulo em relógio é mantido por empurrões periódicos dados pelos pesos; o de um balanço de criança, idem. Vamos chamar a força externa de $F(t)$; com amortecimento linear, a eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) ,$$

equação que também aparece em várias outras áreas da Física. Exemplo importante: circuito RLC com gerador em série:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t)$$

Vamos reescrevê-la, com a notação anterior e $f(t) = \frac{F(t)}{m}$:

$$\ddot{x} + 2\beta x + \omega_0^2 x = f(t)$$

Operadores diferenciais lineares

É conveniente pensar no lado esquerdo desta equação como o resultado da aplicação de um certo operador diferencial D sobre a função $x(t)$

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad ,$$

e a eq. fica $\quad Dx = f$

A noção (conceito) de um operador diferencial como este é uma ferramenta matemática poderosa, com muitas aplicações em física. Em nosso presente caso, a característica importante deste operador é ser <u>linear</u>:

$$D(ax_1 + bx_2) = aDx_1 + bDx_2 \, ,$$

a e b constantes, x_1 e x_2 funções de $\underline{t}$.

(linguagem da álgebra linear: relembrar)

Nesta linguagem, a eq. do oscilador amortecido (sem forçamento) é

$$Dx = 0$$

O princípio de superposição se torna óbvio nesta linguagem: se $Dx_1 = 0 = Dx_2$,

$$D(ax_1 + bx_2) = aDx_1 + bDx_2 = 0 + 0 = 0$$

A equação $Dx = 0$ é chamada de homogênea: cada termo envolve x ou uma de suas derivadas ~~apenas~~ exatamente 1 vez. A equação $Dx = f$ é chamada de inomogênea: o termo f, que não envolve x, é o responsável pelo nome.

Temos agora que resolvê-la.

Soluções homogênea e particular

Com a notação de operadores, a solução geral da equação do oscilador forçado fica muito simples. Suponha que encontremos $x_p(t)$ tal que

$$Dx_p = f$$

Chamamos essa de uma solução particular. Suponha também que encontremos $x_h(t)$ satisfazendo a

$$Dx_h = 0$$

Esta é a solução geral (da) homogênea. Já sabemos, para esta equação, que $x_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. Mas

$$D(x_p + x_h) = Dx_p + Dx_h = f$$

Como $x_p + x_h$ tem 2 constantes arbitrárias (em x_h), esta é a solução geral.

Soluções complexas para forçamento senoidal.

Suponha que $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$. (Cuidado! $\omega \neq \omega_0$ - vamos ver que o oscilador "responde" com + intensidade quando $\omega \approx \omega_0$). A importância deste problema reside principalmente em que (quase) qualquer força pode ser escrita como uma série de forças senoidais (teorema de Fourier).

A equação a resolver é

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Considere também $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = f_0 \operatorname{sen}(\omega t)$

Vamos definir a função complexa $z(t) = x(t) + iy(t)$. Então,

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t},$$ que é muito + fácil de resolver graças às propriedades da exponencial. Depois de resolvê-la, basta tomar a parte real da solução.

Vamos "adivinhar" uma solução:

$z(t) = Ce^{i\omega t}$ (porque?)

$$\Downarrow$$

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)Ce^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\Downarrow$$

z é solução se $C = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$

Antes de tomar $Re(z)$, reescrevamos C na forma $C = Ae^{-i\delta}$, A e $\delta \in \mathbb{R}$.

Quem são?

$$A^2 = CC^* = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \, \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}$$

$$\rightarrow \quad A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

(e A é a amplitude das oscilações provocadas por $f(t)$). Este importante resultado mostra como a amplitude das oscilações depende dos vários parâmetros do problema (já que $x_h(t) \to 0$ quando t cresce). Vemos que ela é grande quando $\omega \approx \omega_0$: o oscilador responde mais intensamente quando é forçado a uma frequencia ω próxima a sua frequencia natural ω_0.

O ângulo de fase δ:

$$A e^{-i\delta} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$$

$$\Rightarrow f_0 e^{i\delta} = A(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)$$

Como f_0 e A são reais, δ é a fase do número complexo $(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega$; logo

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

A solução $z(t) = C e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t - \delta)}$ está completa

$$\Rightarrow x_p(t) = Re(z(t)) = A\cos(\omega t - \delta),$$

e a solução geral é

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Como os 2 termos da solução homogênea decrescem exponencialmente (r_1 e $r_2 < 0$), são chamados de transientes (de "transitórios"). Eles dependem das condições iniciais mas ~~são~~ tornam-se logo irrelevantes. O comportamento a longo prazo da solução é dominado pelo termo cos da solução particular.

Importante ressaltar: esta é a solução para um oscilador linear ((tanto a força restauradora quanto o arrasto são lineares). Osciladores não-lineares são, no entanto, + comuns e dão origem à comportamentos + ricos e inusitados.

Os detalhes do movimento do oscilador forçado dependem da intensidade do parâmetro de amortecimento β. Um exemplo: se o amortecimento é fraco ($\beta < \omega_0$), os termos de transiente podem ser reescritos na forma

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + A_{tr} e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta_{tr})$$

As constantes A_{tr} e δ_{tr} são (arbitrárias e) determinadas pelas condições iniciais; A e δ não, e são determinadas - independentemente das condições iniciais - pelos parâmetros do sistema. Enquanto ~~o transiente decai~~ as oscilações do transiente têm frequência ω_1 com amplitude que decresce exponencialmente ($e^{-\beta t}$), as oscilações forçadas têm amplitude fixa e a frequência ω do forçamento. Portanto, quaisquer que sejam as condições iniciais, depois de um (curto) período inicial, o sistema oscilará sempre do mesmo modo, com frequência igual a do forçamento e com um atraso de fase δ em relação a este: este é um exemplo de um atrator de uma dada dinâmica, conceito que ganha muita relevância no estudo de sistemas não-lineares e sujeitos a comportamentos caóticos.

5.6 Ressonância

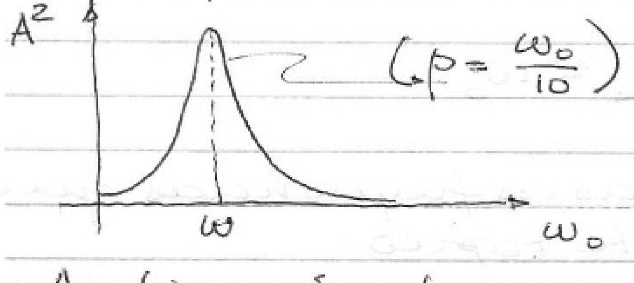
Estudaremos como a amplitude e a fase do atrator dependem dos parâmetros do sistema.

$A \propto f_0$: fácil de adivinhar...

A depende também de ω, ω_0 e β.

O caso + interessante é quando $\beta \ll \omega_0$.

Como
$$A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2},$$
neste caso, a 2ª parcela do denominador é pequena; se ω_0 e ω são muito diferentes, $(\omega_0^2-\omega^2)^2$ é grande e a amplitude é pequena. Por outro lado, se ω é próximo a ω_0, as 2 parcelas são pequenas e A é grande. Portanto, se variarmos ω (ou ω_0), observaremos grande variação na amplitude das oscilações.



fenômeno da ressonância

Aplicação cotidiana: recepção de sinais de rádio por circuito RLC. Quando você sintoniza seu rádio em 90,3 MHz ~~você~~ está ajustando o circuito RLC da sintonia para que esta seja sua frequência natural (ω_0). Todas as estações estão transmitindo e as ondas EM que emitem chegando a seu rádio, mas só o sinal com a frequência "certa" induz corrente significativa.

Exemplo mecânico: carro passando por sequencia de lombadas; soldados marchando sobre uma ponte.

Os detalhes do fenômeno têm algumas complicações. Por exemplo, a posição exata do máximo depende de se variamos ω_0 com ω fixo ou vice-versa.
$\underline{A}$ é máximo quando $(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2$ é mínimo; se variamos ω_0, este mínimo ocorre quando $\omega_0=\omega$ - mas se variamos ω, o 2º termo também varia, e o máximo ocorre em:

$$f(\omega) = (\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$
$$f'(\omega) = 2(\omega_0^2-\omega^2).(-2\omega) + 8\beta^2\omega = 0$$
$$2\beta^2 = \omega_0^2-\omega^2, \text{ e } \omega = \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

Se $\beta \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_2 \simeq \omega_0$

Vamos rever todas as frequencias que apareceram neste tópico:

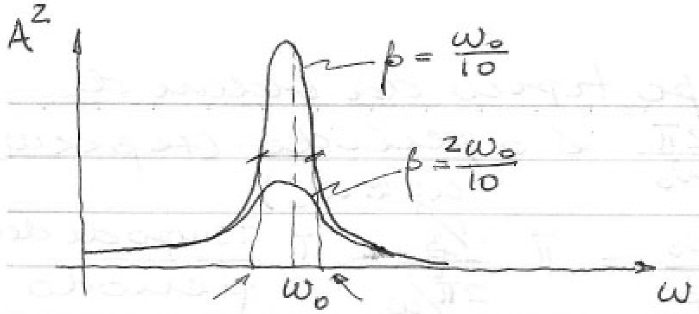
ω_0 : frequencia natural do oscilador (sem amortecimento)

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$: frequencia do oscilador (fracamente) amortecido

ω : frequencia de forçamento

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$: valor de ω para a qual resposta é máxima (ω_0 fixa)

$A_{max} \simeq \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$



Se β diminui, A_{max} aumenta e o pico fica + estreito. (e ω_2 + próxima de ω_0)

- Largura da ressonância; o fator de qualidade Q

Vamos definir a largura (à metade do máximo) como o intervalo entre 2 valores de ω nos quais $A^2 = \frac{1}{2} A^2_{max} \Rightarrow \omega \simeq \omega_0 \pm \beta$

$$\Downarrow$$

largura $\simeq 2\beta$, meia largura $\simeq \beta$

A "nitidez" do pico de ressonância é indicada pela razão entre a largura e a posição do pico. Como, em muitas aplicações, queremos ressonâncias muito nítidas, definimos seu fator de qualidade $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$

Exemplos: bons relógios precisam de alto Q. Q (pendulo) $\simeq$ 100

Q (cristal de quartzo) $\simeq$ 10.000

Outra forma de olhar o Q: na ausência de forçamento, oscilações são amortecidas num tempo típico da ordem de $\frac{1}{\beta}$. Mas $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ é o período (se $\beta << \omega_0$, $\omega_1 \approx \omega_0$)

Portanto, $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \pi \frac{1/\beta}{2\pi/\omega_0} = \pi \underbrace{\frac{\text{tempo de decaimento}}{\text{período}}}_{\text{número de ciclos}}$

- Defasagem na ressonância.

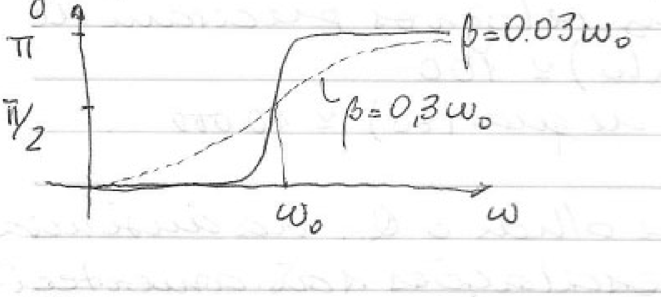
$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Vamos acompanhar δ quando variamos ω, começando por valores pequenos (β pequeno): - com $\omega << \omega_0$, δ é pequeno $\Rightarrow$ oscilações estão praticamente em fase com o forçamento

- quando $\omega \to \omega_0$, δ aumenta (devagar)

- na ressonância, $\omega = \omega_0$ e $\delta = \pi/2$

- $\omega > \omega_0$, o argumento do arctg é < 0 e se aproxima de 0 quando ω cresce $\Rightarrow$ δ passa de $\pi/2$ e se aproxima de π. Em particular, se $\omega >> \omega_0$, as oscilações estão quase perfeitamente em oposição de fase com o forçamento. (experiência com pendulo)



Em colisões atômicas e nucleares, δ (phase shift) tem muita importância.